

## ALCUNE REGOLARITA' DAI NUMERI PRIMI (I e II PARTE )

CAROLLA GUIDO<sup>1</sup>

*Sunto.* Lo scopo del presente articolo e' quello di evidenziare alcune regolarità riscontrabili dai numeri primi; partendo dai primi gemelli per i quali sono note le tre famiglie di coppie di numeri, si e' ampliata la ricerca alle differenze tra due primi consecutivi e non, fino a trovare tutti i raggruppamenti delle diverse famiglie di coppie di primi e quindi di osservare alcune evidenti regolarità, per concludere con le formule generali che permetteranno di ottenere, per ogni gap, tutte le coppie di numeri primi, a qualunque relativa famiglia appartengano. Si sono fatti pochi esempi, allo scopo di rendere breve l'esposizione e per dare spazio al lettore di farne altri. Dapprima si riportano alcune anticipazioni sulla II parte, che al termine viene riportata al completo, con sette paragrafi di vari contenuti, dei quali il quarto e il quinto sulla teoria ingenua degli insiemi.

### SOME REGULARITY THE FIRST NUMBER (I and Part II)

*Abstract.* The purpose of this article 'to highlight some regularity found by prime numbers, starting from the first twins for which are known families of the three pairs of numbers, has' expanded the search to differences between the first two consecutive and not until to find all the different groupings of families of pairs of first and then to observe some obvious regularity, to conclude with the general formulas that will be used to obtain for any gap, all pairs of prime numbers, whatever its family owned. There has been few examples in order to make the short exposure and give space for the reader to make others. First we report some advances on the part II, which is the term given to complete, with seven different sections of content, of which the fourth and fifth on the naive theory of sets.

#### *Introduzione*

La seguente premessa elementare, della quale si esonera il lettore esperto nella teoria dei numeri primi, permette di poter immediatamente comprendere l'argomento in esame e che potrà essere capito anche saltando temporaneamente la lettura di qualche "proposizione". Fatta eccezione per il numero primo 3, la somma, ripetuta fino ad una sola cifra, delle cifre di ogni numero primo (tutti i numeri primi, eccetto il 2, hanno l'ultima cifra che e' sempre 1, 3, 7, 9) appartiene all'insieme  $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ , al contrario di quanto si verifica per ogni numero dispari composto, la cui stessa sommatoria appartiene ovviamente all'insieme  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , che si ha dall'unione del primo insieme con l'insieme  $\{3, 6, 9\}$ , in quanto in questo ultimo insieme sono comprese le somme delle cifre, fino ad una sola, dei numeri composti divisibili per 3.

#### *1. I gap e le famiglie*

Ora, si è fatto riferimento all' articolo [1], pubblicato recentemente sul "Periodico di matematiche", dal quale risulta: che tutte le coppie di numeri primi gemelli, all'infuori della coppia 3, 5, appartengono a sole tre famiglie (5 - 7), (2 - 4), (8 - 1), che si ottengono dalla somma delle cifre che compongono il numero primo della coppia e se il numero ottenuto non è un numero costituito da una sola cifra, si sommano ancora progressivamente le cifre fino ad ottenere un numero a una sola cifra; che tutte le coppie di numeri primi gemelli, a qualunque delle tre famiglie appartengano, sono sempre del tipo  $6n \mp 1$ , con  $n$  intero  $\geq 1$ , fatte le debite esclusioni per  $n \in \{4, 6, 8, 9, \dots\}$ , con i quali elementi si ottengono coppie nelle quali uno o due numeri sono composti (n. d. a.).

---

<sup>1</sup> Docente ordinario di Matematica e Dirigente scolastico in ogni ordine di scuola a r.; e-mail guidocarolla@libero.it

Con detto riferimento, si è estesa analogamente la ricerca anche alle coppie di primi la cui differenza, detta gap, sia un numero pari  $> 2$ , per cui si sono compilate le seguenti “illimitate” tabelle, per le quali il lettore potrà provare ad integrarle adeguatamente con qualsiasi coppia di primi. Per il  $gap=2$  sui numeri primi gemelli, con esclusione della coppia di 3, 5, si riportano nella tab. 1 tre famiglie che si indicano con i due termini in parentesi, ottenuti, come detto, dalle somme fino ad una sola cifra dei due primi gemelli e sotto alcune coppie degli stessi. Analogamente si procede per i rimanenti gap.

tab. 1,  $gap=2$ , vi sono tre famiglie:

(5 - 7), (2 - 4), (8 - 1)  
 5, 7 11, 13 17, 19  
 41, 43 29, 31 71, 73  
 59, 61 101, 103 107, 109  
 .....  
 .....  
 .....

tab. 2,  $gap=4$ , tre famiglie:

(7 - 2), (4 - 8), (1 - 5)  
 7, 11 13, 17 19, 23  
 43, 47 67, 71 37, 41  
 79, 83 193, 197 127, 131  
 97, 101 103, 107 109, 113  
 .....  
 .....  
 .....

tab. 3,  $gap=6$ , vi sono sei famiglie:

(5 - 2), (4 - 1), (2 - 8), (8 - 5), (7 - 4), (1 - 7)  
 23, 29 31, 37 47, 53 53, 59 61, 67 73, 79  
 131, 137 157, 163 83, 89 233, 239 151, 157 433, 439  
 167, 173 ..... 173, 179 .....  
 .....  
 .....  
 .....

tab. 4,  $gap=8$ , tre famiglie:

(2 - 1), (5 - 4) (8 - 7)  
 .....  
 479, 487 401, 409 449, 457  
 911, 919 491, 499 683, 691  
 .....  
 .....  
 .....

tab. 5,  $gap=10$ , tre famiglie:

(4 - 5), (1 - 2), (7 - 8)  
 139, 149 181, 191 241, 251  
 283, 293 .....  
 .....  
 .....  
 .....

tab. 6,  $gap=12$ , di nuovo sei famiglie:

(1 - 4), (2 - 5), (4 - 7), (5 - 8), (7 - 1), (8 - 2)  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

tab. 7,  $gap=14$ , tre famiglie:

(2 - 7), (5 - 1), (8 - 4)  
 .....  
 .....  
 .....

tab. 8,  $gap=16$ , tre famiglie:

(1 - 8), (4 - 2), (7 - 5)  
 .....  
 .....  
 .....

tab. 9,  $gap=18$  e  $gap=0$ , ancora sei famiglie:

(1 - 1), (2 - 2), (4 - 4), (5 - 5), (7 - 7), (8 - 8)  
 .....  
 .....  
 .....

Nelle tabelle di cui sopra sono state riportate solo coppie di primi consecutivi, però come già detto le coppie di primi, da mettere in relazione con le varie famiglie, possono essere costituite anche da primi non consecutivi.

## 2. Le proposizioni

Si fa presente che da ora in poi si daranno, sotto forma di “proposizioni”, alcune ricorrenti regolarità, che spiegano anche il motivo per cui si è sorvolato nel non riportare, nelle tabelle di cui sopra, altre coppie di numeri primi.

Proposizione 1 Ai  $gap=6$ , ai suoi multipli 12, 18 e al  $gap=0$  appartengono 6 famiglie, in tutto 18 famiglie; agli altri  $gap= 2, 4, 8, 10, 14, 16$  ed ai loro multipli appartengono 3 famiglie, in tutto altre 18

Proposizione 2 Le tre o sei famiglie dei vari gap sono formate tutte dai soli numeri 1, 2, 4, 5, 7, 8.

Proposizione 3 La prima terna possibile di coppie di gemelli (5, 7), (11, 13), (17, 19), i cui elementi sono tutti consecutivi, che caratterizza le tre relative famiglie (5 - 7), (2 - 4), (8 - 1) è

anche in assoluto la prima terna di coppie di numeri primi tutti consecutivi\_. A distanza di un solo primo segue la terna di coppie di primi consecutivi, di gap=4, (7, 11), (13, 17), (19, 23) e a breve anche la terna (97, 101), (103, 107), (109, 113), entrambe caratterizzanti la famiglia (7 - 2), (4 - 8), (1 - 5).

**Proposizione 4** Pur senza l'uso delle coppie di numeri primi, e' sempre possibile ottenere le coppie caratterizzanti le famiglie, ad esempio per il gap=12, la cui somma delle cifre dà 3, partendo rispettivamente da 1, 2, 4, 5, 7, 8, si ha  $1+3=4$ , quindi la famiglia (1 - 4), così per ogni altra famiglia da 2 si ha il secondo numero  $2+3=5$  e quindi (2 - 5), per ottenere (7 - 1) si procede nella somma fino ad una sola cifra, cioè  $7+3=10$  e  $1+0=1$ , ecc.

**Proposizione 5** Procedendo con le somme ripetute delle cifre fino ad una sola cifra di qualsiasi gap si perviene nell'ordine ai seguenti gap che si ripetono di nove in nove 2, 4, 6, 8, (1), (3), (5), (7), (9) con i relativi gap equivalenti, avendo indicato con parentesi i cinque gap (1), (3), (5), (7), (9), questi ultimi impropri perché non possono essere vere differenze tra numeri primi.

Dalla tabella 10 dei gap tra i numeri primi, dei gruppi di famiglie, del numero di famiglie dei gruppi, della somma della coppia di numeri di ogni famiglia e della sommatoria fino ad una sola cifra relativa a ciascun gruppo, si notano tutte le evidenti regolarità, espresse nelle varie proposizioni.

tab. 10

Gruppi equivalenti di gap tra due num. primi som.	Gruppi famiglie	Num. famiglie	Som. nn. cc. famiglia	Som. d.
2, 20, 38, 56, 74, 92, ...	(2 - 4),(5 - 7),(8 - 1)	3	6, 3, 9	9
4, 22, 40, 58, 76, 94, ...	(1 - 5),(4 - 8),(7 - 2)	3	6, 3, 9	9
6, 24, 42, 60, 78, 96, ...	(1-7),(2 -8 ),(4 -1),(5-2),(7-4),(8-5)	6	8, 1, 5, 7, 2, 4	9
8, 26, 44, 62, 80, 98, ...	(8 - 7),(2 - 1),(5 - 4)	3	6, 3, 9	9
(1),10,28,46, 64, 82, ...	(1 - 2),(4 - 5),(7 - 8)	3	3, 9, 6	9
(3),12,30,48, 66, 84, ...	(1-4),(2-5),(4-7),(5-8),(7-1),(8-2)	6	5, 7, 2, 4, 8, 1	9
(5),14,32,50, 68, 86, ...	(2 - 7),(5 - 1),(8 - 4)	3	9, 6, 3	9
(7),16,34,52, 70, 88, ...	(1 - 8),(4 - 2),(7 - 5)	3	9, 6, 3	9
(9),0,18,36,54,72,90, ...	(1-1),(2-2),(4-4),(5-5),(7-7),(8-8)	6	2, 4, 8, 1, 5, 7	9
<b>Totali</b>	<b>9</b>	<b>9</b>	<b>36</b>	<b>9</b>

La seguente tabella 11 riepiloga ordinatamente tutte le famiglie di coppie di numeri primi

(1-1)	(1-2)	(1-4)	(1-5)	(1-7)	(1-8)
(2-1)	(2-2)	(2-4)	(2-5)	(2-7)	(2-8)
(4-1)	(4-2)	(4-4)	(4-5)	(4-7)	(4-8)
(5-1)	(5-2)	(5-4)	(5-5)	(5-7)	(5-8)
(7-1)	(7-2)	(7-4)	(7-5)	(7-7)	(7-8)
(8-1)	(8-2)	(8-4)	(8-5)	(8-7)	(8-8)

**Proposizione 6** Il numero delle possibili famiglie delle coppie di primi sono in totale 36 e quello dei gruppi di famiglie e' 9.

**Proposizione 7** Come detto all'inizio per i primi gemelli, fatta eccezione per i primi 2, 3, per tutte le coppie di numeri primi del primo gap dei vari gruppi, a qualunque famiglia appartengano, sono stati calcolati per mezzo di semplici calcoli i relativi tipi o formule caratteristiche, che si riportano con qualche esempio:

Tutte le coppie di numeri primi di gap=4, a qualunque delle tre famiglie, (7 - 2), (4 - 8), (1 - 5), appartengano, sono del tipo o scaturiscono da  $3n \mp 2$ , con  $n$  dispari  $\notin \{9,11,17,19,21,25,\dots\}$ ; es. per  $n=3$  si ha la coppia 7, 11 della famiglia (7 - 2); per  $n=5$  si ha 13, 17 della famiglia (4 - 8), ecc.

Per il  $gap=6$ , le coppie di primi sono del tipo  $2n \mp 3$ , con  $n$  intero  $\geq 4$ ; es. per  $n=50$  si ha la coppia 97, 103 della famiglia (7 - 4), ecc.

Per il  $gap=8$ , le coppie di primi scaturiscono da  $3n \mp 4$ , con  $n$  dispari  $\geq 3$ ; es. per  $n=31$  si ha la coppia 89, 97 della famiglia (8 - 7); per  $n=35$  si ha la coppia di primi non consecutivi 101, 109 della famiglia (2 - 1), ecc.

Per il  $gap=10$ , le coppie di primi si hanno da  $6n \mp 5$ , con  $n$  intero  $\geq 2$ ; es. per  $n=24$  si ha la coppia 139, 149, della famiglia (4 - 5), ecc.

Per il  $gap=12$ , le coppie di primi scaturiscono dalla formula  $n \mp 6$ , con  $n$  dispari  $\geq 11$ , appartenendo sempre ad una delle sei famiglie già indicate.

Per il  $gap=14$ , tutte le coppie di primi a qualunque delle famiglie (2 - 7), (5 - 1), (8 - 4) appartengano, sono sempre del tipo  $6n \mp 7$ , con  $n$  intero  $\geq 4$ .

Per il  $gap=16$ , tutte le coppie di primi a qualunque delle famiglie (1 - 8), (4 - 2), (7 - 5) appartengano, sono sempre del tipo  $3n \mp 8$ , con  $n$  dispari  $\geq 5$ .

Per il  $gap=18$  e per il  $gap=0$ , tutte le coppie di primi a qualunque delle famiglie (1 - 1), (2 - 2), (4 - 4), (5 - 5), (7 - 7), (8 - 8) appartengano, sono rispettivamente sempre del tipo  $2n \mp 9$ , con  $n$  intero  $\geq 7$  e  $n \mp 0$ , con  $n$  dispari  $\geq 5$ .

### 3. I tipi o formule generali

Infine nella seguente tab. 12 si riportano, per ciascun gruppo di  $gap$  equivalenti, i relativi tipi o le formule generali che permetteranno di ottenere, per ogni  $gap$ , tutte le coppie di numeri primi, a qualunque relativa famiglia appartengano, ad esclusione dei primi 2 e 3. Si noti che quando il coefficiente di  $n$  è dispari e il  $gap/2$  è pari allora  $n$  è sempre dispari, se invece il  $gap/2$  è dispari allora  $n$  è sempre pari.

tab. 12

Gruppi di $gap$ equivalenti	Tipo o formula generale	Variazione di $n$
a 2, a 10, a 14	$6n \mp gap/2$	$n$ intero $\geq 1$
a 4, a 8, a 16	$3n \mp gap/2$	$n$ intero $\geq 3$
a 6, a 18	$2n \mp gap/2$	$n$ intero $\geq 4$
a 12	$n \mp gap/2$	$n$ intero $\geq 11$

### 4. Conclusioni

Con una ricerca abbastanza approfondita non sono stati trovati argomenti simili all'articolo citato ed al presente, ma non si vuole escludere che, data l'elementare trattazione, possa averla già fatta EULERO o qualcun altro, secoli fa. Forse, se l'argomento trattato dovesse risultare innovativo, aprirebbe le porte a possibili miglioramenti dei risultati nel campo della teoria dei numeri primi.

## II Parte

Si è voluto procedere, in riferimento rispettivamente alla 3<sup>a</sup>, 4<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> proprietà dell'articolo [1] già citato, ad una sintetica applicazione delle stesse, estendendo il discorso ai  $gap \geq 4$ , come premessa del parziale contenuto della II parte.

Proposizione a) La somma delle cifre del primo elemento di una coppia qualsiasi di primi consecutivi, relativi ai  $gap=2, 8, 14$  e loro equivalenti, oppure ai  $gap 4, 10, 16$  e loro equivalenti, appartiene rispettivamente all'insieme  $\{2, 5, 8\}$ , oppure all'insieme  $\{1, 4, 7\}$ , e non può appartenere all'insieme  $\{1, 4, 7\}$ , oppure all'insieme  $\{2, 5, 8\}$ , perché in entrambi i casi non solo i successivi numeri dispari (col  $gap=2$ , non ve ne sono) ma anche il secondo maggiore numero (che è primo) del relativo  $gap$ , sarebbero divisibili per uno o più numeri primi dell'insieme  $\{3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ ; invece, la stessa somma delle cifre del primo o del secondo elemento di una coppia qualsiasi di

primi relativi ai  $gap=6, 12, 18$  e loro equivalenti appartiene sempre all'insieme completo  $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ .

Per esplicitare quanto detto e per brevità si riporta un solo esempio: dati i primi 683, 691 di  $gap=8$  con 683, la cui somma delle cifre fino ad una sola è  $s(683)=8$ , appartenente all'insieme  $\{2, 5, 8\}$ , non può appartenere all'insieme  $\{1, 4, 7\}$ , altrimenti al pari dei successivi dispari 685 (divisibile per 5), 687 (divisibile per 3), 689 (divisibile per 13), il consecutivo 691 (primo) sarebbe anch'esso divisibile per altri primi, il che è assurdo.

Proposizione b) Le somme di due numeri primi relative ai  $gap=2, 4, 8, 10, 14, 16$  sono tutte multiple di 6, ossia per  $h < k$  si ha  $p_h + p_k = 6m$ ; per le somme dei due primi  $gap=2, 10, 14$ , con  $m$  pari  $\geq 2$ ; per le somme dei due primi  $gap=4, 8, 16$ , con  $m$  dispari  $\geq 3$ . Infatti dette somme sono divisibili per 2 perché pari e sono divisibili per 3 in quanto le somme delle cifre ripetute fino ad una sola appartiene all'insieme  $\{3, 6, 9\}$ .

Le somme di due numeri primi relative ai  $gap=6, 12, 18$  sono multiple di 2, ossia si ha  $p_h + p_k = 2m$ ; per le somme dei due primi  $gap=6, 18$ , con  $m$  pari  $\geq 8$ ; per la somme dei due primi  $gap=12$ , con  $m$  dispari  $\geq 13$ . Infatti dette somme sono divisibili per 2 perché pari ed hanno la conseguente somma delle cifre ripetuta fino ad una sola che appartiene all'insieme  $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ , e non può appartenere all'insieme  $\{3, 6, 9\}$ , perché detta somma non è divisibile per 3.

Proposizione c) La 5<sup>a</sup> proprietà del citato articolo [1] sui primi gemelli, applicata alle coppie di primi successive anche non consecutive, dei vari  $gap$ , consente di dire che le distanze tra i primi elementi delle due coppie sono multiple di :

3 per le coppie di  $gap=4, 8, 16$ ; 2 per le coppie di  $gap=6, 18$ ; 6 per le coppie di  $gap=2, 10, 14$ ; 1 per le coppie di  $gap=12$ .

Se la distanza è multipla di 3, in quanto la somma delle cifre, fino ad una sola, dei primi elementi delle due coppie di  $gap=4, 16$  appartengono all'insieme  $\{1, 4, 7\}$  e pertanto la somma delle cifre, fino ad una sola, della distanza, in qualsiasi combinazione possibile, appartiene all'insieme  $\{3, 6, 9\}$ ; per il  $gap=8$ , in quanto le somme delle cifre, fino ad una sola, dei primi elementi delle due coppie appartengono all'insieme  $\{2, 5, 8\}$  e pertanto la somma delle cifre, fino ad una sola, della distanza, in qualsiasi combinazione possibile, appartiene all'insieme  $\{3, 6, 9\}$ .

Se la distanza è multipla di 2, appartengono rispettivamente all'insieme  $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$  la somma delle cifre, fino ad una sola, dei primi elementi e all'insieme  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  la somma delle cifre, fino ad una sola, delle distanze. Se la distanza è multipla di 6, per il  $gap=10$  si veda ciò che accade per il  $gap=4$ , per il  $gap=14$ , si veda ciò che accade per il  $gap=8$ . Infine, per il  $gap=12$ , con la distanza che è multipla di 1, si veda ciò che accade per la distanza multipla di 2.

Proposizione d) La tab. 10 riporta implicitamente ogni numero pari dei vari  $gap$  e, con il riferimento a tutte le 36 famiglie, le infinite coppie di numeri primi consecutivi e non. Per i soli primi consecutivi, vi è una relazione con la congettura di Polignac (1849) [11], [12] che dice: "Ogni numero pari è ottenibile come differenza di infinite coppie di numeri primi consecutivi".

Proposizione e) Partendo dall'osservazione della tab. 10, dalle precedenti tabelle e da qualche esempio numerico si otterranno le tabb. 13 e 14. Ess.: data una coppia qualsiasi di numeri primi 17, 19 della famiglia (8 - 1), si ha  $17+19=36$ ,  $3+6=8+1=9$ ; data la coppia di primi 241, 251 della famiglia (7 - 8), si ha  $241+251=492$ ,  $4+9+2=7+8=15$ ,  $1+5=6$ , ecc.; per cui si può asserire: la somma dei numeri che caratterizzano una famiglia di coppie di primi è congruente alla somma delle cifre ripetute fino ad una sola della somma dei due primi costituenti la coppia. Quindi sostituendo dalla tab. 10 al posto delle 36 famiglie le somme delle cifre ripetute fino ad una sola dei due numeri caratterizzanti le stesse, si possono scrivere le due tabelle seguenti:

tab. 13

Gap equivalenti a	Somme ripetute dei due numeri delle 36 famiglie
2	6, 3, 9
4	6, 3, 9
6	8, 1, 5, 7, 2, 4
8	3, 9, 6
10	3, 9, 6
12	5, 7, 2, 4, 8, 1
14	9, 6, 3
16	9, 6, 3
18, 0	2, 4, 8, 1, 5, 7

Tab. 14

Gruppi gap equivalenti a	Somme ripetute dei due numeri di ogni famiglia
2, 4, 8, 10, 14, 16	3, 6, 9
6, 12, 18, 0	1, 2, 4, 5, 7, 8

Le tabelle 13, 14 implicitamente contengono ogni numero pari ed infinite coppie di numeri primi, comprese le coppie di primi non distinti dell'ultima riga di entrambe relative al  $\text{gap}=0$ . Pertanto, una delle due o entrambe le tabelle sono in evidente relazione con la congettura di Goldbach (1742) [11], [12] che dice: "Ogni numero pari  $> 2$  è somma di due numeri primi non necessariamente distinti".

P. S. Al lettore si rivolgono le otto seguenti domande:

Vi sono sequenze di sei numeri primi consecutivi, la cui somma delle cifre di ciascuno di essi, fino ad una sola, dia:

1) la sequenza non ordinata 1, 2, 4, 5, 7, 8 ?

2) la sequenza ordinata 1, 2, 4, 5, 7, 8 ?

3) le sei sequenze di sei volte 1, sei 2, sei 4, sei 5, sei 7, sei 8 ? (indipendentemente, cioè con l'una che possa escludere le altre).

In ogni caso, affermativo o negativo, separatamente si propongono le relative congetture.

## Ancora sulla II parte dell'articolo "ALCUNE REGOLARITA' DAI NUMERI PRIMI"

### 1. Un'osservazione sulle somme contratte e sul software del massimo gap

Facendo seguito a quanto l'autore ha premesso sopra, questa II parte [14] si riapre con un'osservazione importante sulla somma contratta fino ad una sola cifra in riferimento ai numeri primi, alle famiglie di coppie degli stessi ed ai gap tra numeri primi: detta somma contratta non è altro che un argomento della aritmetica modulare, in particolare del modulo 9. Infatti, ad es. il numero primo  $97 \pmod{9} = 7$ , che è il resto di  $97:9 = 10$ , resto 7, il numero primo  $10007 \pmod{9} = 8$ , che è il resto di  $10007:9 = 1111$ , resto 8, oppure il  $\text{gap} = 78$  è equivalente a  $78 \pmod{9} = 6$ , che è il resto di  $78:9 = 8$ , resto 6, il  $\text{gap} = 0$  è equivalente a 18 ed a  $72 \pmod{9} = 0$  o 18 (o gap improprio = (9)), come si è detto nella I parte, perché 0 è il resto di  $72:9 = 8$ , ecc..

Molto utile risulta l'interessante software [15] per la ricerca del massimo gap tra numeri primi consecutivi. Con esso, ad es., si possono avere fra l'altro valori di gap in tempi brevi, ma anche ad es. due primi di grandezza  $10^9$ , con  $gap=320$ , in circa 4 ore di attività del Pc.

$p_h$ :           2300942549  
 $p_{h+1}$ :       2300942869  
gap:            320

## 2. Risposta alla domanda 1) del Post Scriptum dell'Appendice I parte

Inoltre, in riferimento alle otto domande rivolte ai lettori sulle 8 eventuali congetture, alla fine del paragrafo della II parte parziale, la sequenza dei numeri primi 5, 7, 11, 13, 17, 19, che con il mod. 9 è 5, 7, 2, 4, 8, 1, risolve il caso "disordinato" delle cifre 1, 2, 4, 5, 7, 8: quindi, considerata l'affermazione positiva del caso, la relativa congettura diventa "vi sono altre sequenze di sei numeri primi la cui somma contratta dia 1, 2, 4, 5, 7, 8, in modo "disordinato"? Se sì, sono infinite?"

## 3. Aspetto statistico sulle famiglie e sulle relative minori coppie dei primi

In apertura del presente paragrafo è opportuno ridare una definizione di coppia di numeri primi in riferimento alle loro differenze, o distanze o come già detto ai loro gap: in generale detto  $p_h$  un numero primo  $\forall p_h > 3$ , siano le coppie di primi consecutivi  $p_h$  e  $p_{h+1}$  o per  $h < k$  i non consecutivi  $p_h$  e  $p_k$ , per definizioni si hanno rispettivamente  $p_{h+1} = p_h + gap$  o  $p_k = p_h + gap$ .

Detto ciò, proprio con i sei numeri primi riportati nel § 2 (ma è solo un aspetto statistico, e tale da ora in poi è il contenuto di tutto il paragrafo) si possono ottenere 21 delle 36+6 (quelle del  $gap=18$ ) famiglie di minori coppie di primi, infatti per il  $gap = 8$  alle famiglie (2 - 1), (5 - 4) appartengono rispettivamente le coppie di primi 11,19 e 5,13; per il  $gap = 0$  alle famiglie (1-1),(2-2),(4-4),(5-5),(7-7),(8-8) appartengono rispettivamente le coppie 19, 19, 11, 11, 13, 13, 5, 5, 7, 7, 17, 17; per il  $gap = 10$  alla famiglia (7 - 8) appartiene la coppia 7, 17; per il  $gap = 2$  alle famiglie (2-4),(5-7),(8-1) appartengono r. le coppie 11, 13, 5, 7 e 17, 19; per il  $gap = 12$ , alle famiglie (5 - 8) e (7 - 1) appartengono r. le coppie 5, 17 e 7, 19; per il  $gap = 4$ , alle famiglie (4 - 8) e (7 - 2) appartengono r. le coppie 13, 17 e 7, 11; per il  $gap = 14$ , alla famiglia (5 - 1) appartiene la coppia di primi 5, 19; infine per il  $gap = 6$ , alle famiglie (2-8),(4-1),(5-2),(7-4) appartengono r. le coppie 11, 17, 13, 19, 5, 11 e 7, 13. Le minori coppie di primi appartenenti a ciascuna delle altre 15+6 (quelle del  $gap=18$ ) famiglie, oltre che con i sei primi di cui sopra, sono formate con i seguenti altri otto primi, 23, 29, 31, 37, 43, 53, 61, 71: infatti per il  $gap = 8$  alla famiglia (8 - 7) appartiene la coppia 53, 61; per il  $gap = 18$  alle famiglie (1-1),(2-2),(4-4),(5-5),(7-7),(8-8) appartengono rispettivamente le coppie di primi 19,37, 11,29, 13,31, 5,23, 43,61, 53,71; per il  $gap = 10$  alle famiglie (1 - 2), (4 - 5) appartengono r. le coppie 19,29, 13,23; per il  $gap = 12$  alle famiglie (1-4),(2-5),(4-7),(8-2) appartengono r. le coppie 19,31, 11,23, 31,43, 17,29; per il  $gap = 4$  alla famiglia (1 - 5) appartiene la coppia di primi 19, 23; per il  $gap = 14$  alle famiglie (2 - 7), (8 - 4) appartengono r. le coppie 29,43, 17,31; per il  $gap = 6$  alle famiglie (1 - 7), (8 - 5) appartengono r. le coppie 37,43, 17,23; per il  $gap = 16$  alle famiglie (1-8),(4-2),(7-5) appartengono r. le coppie 37,53, 13,29 e 7,23.

Quindi, le minori coppie di primi, consecutivi o non consecutivi, di ciascuna delle 42 famiglie si possono avere, escludendo 2, 3, 41, 47, 59, 67, dai quattordici primi dal 5 al 71, ovvero l'argomento in questione può essere affrontato con l'elenco iniziale di soli venti numeri primi.

#### 4. Teoria "ingenua" degli insiemi<sup>2</sup> per la funzione $p(s)$

Si noti che il presente paragrafo tratterà i numeri primi in relazione alle somme contratte delle cifre. Premesso che la funzione<sup>3</sup>  $p(s)$ , con  $p \in P$  dipendente dalla variabile  $s \in S$ , determina una relazione binaria  $R$  tra due insiemi distinti  $S$ , insieme che si ottiene dall'aritmetica modulare 9 o dalle somme contratte di ogni numero primo fino ad una sola cifra, e  $P$ , insieme dei numeri primi (escluso il 3), in quanto si istituisce una corrispondenza tra gli elementi di detti insiemi, essendo  $S = \{1,2,4,5,7,8\}$  et  $P = \{P(1), P(2), P(4), P(5), P(7), P(8)\} \setminus \{3\}$ , ove  $P(1) = \{19,37,73,109,\dots\}$ , la cui somma contratta delle cifre di ogni numero primo è  $s=1$ ,  $P(2) = \{2,11,29,47,83,\dots\}$ , con  $s = 2$ , ...  $P(8) = \{17,53,71,107,\dots\}$ , con  $s = 8$ , si ha:  
 $s R P(s)$  e si dice che  $P(s)$  è il corrispondente di  $s$  secondo la  $R$ .

$R:s$  è la somma contratta fino ad una sola cifra di ogni numero primo appartenente all'insieme  $P(s)$ . La funzione  $p(s)$  è, come detto, ogni numero primo, escluso il 3, appartenente al sottoinsieme  $P(s)$  che ha la somma contratta fino ad una sola cifra che è  $s$ .

Detta funzione  $p(s)$  definita nell'insieme  $P$  determina una relazione d'equivalenza  $Re$  in quanto gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Infatti:  $p_i = p_i \quad \forall p_i \in P$ , essendo  $P = \{p : p \text{ è numero primo}\} \setminus \{3\}$

$$p_i = p_j \rightarrow p_j = p_i \quad \forall p_i, p_j \in P$$

$$(p_i = p_j \text{ et } p_j = p_z) \rightarrow p_i = p_z \quad \forall p_i, p_j, p_z \in P$$

Detta relazione di equivalenza  $Re$  definita nell'insieme  $P$  inoltre determina una decomposizione dell'insieme in sottoinsiemi costituiti, come detto sopra, da  $P(1), P(2), P(4), P(5), P(7), P(8)$  che a loro volta sono costituiti ciascuno da elementi equivalenti in riferimento alle somme contratte  $s$ , rispetto alla relazione  $Re$ .

I sottoinsiemi così ottenuti sono non vuoti, disgiunti a due a due e la loro unione dà l'insieme  $P$ . Si ottiene insomma una partizione dell'insieme dato  $P$ .

Ogni sottoinsieme  $P(s)$  può essere individuato da uno degli elementi (numeri primi) che lo costituiscono (es.  $P(2)$  è individuato da qualsiasi primo la cui somma contratta è 2, cioè da 2, 11, 29, 47, 83, ...). Si dice che la relazione  $Re$  ha decomposto l'insieme  $P$  in classi d'equivalenza.

Infine  $P/Re$  è l'insieme quoziente di  $P$  rispetto ad  $Re$  ed è l'insieme i cui elementi (sottoinsiemi  $P(1), P(2), P(4), P(5), P(7), P(8)$ ) sono le classi d'equivalenza ottenute da  $P$  applicando la suddetta relazione  $Re$ .

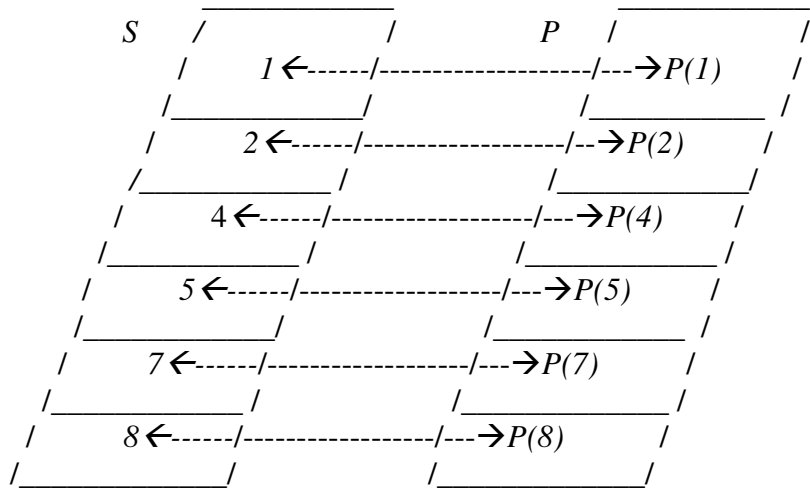
A seguire sono rappresentati con i diagrammi di Eulero-Venn i due insiemi  $S$  e  $P$  i cui elementi sono in corrispondenza biunivoca.

---

<sup>2</sup> La teoria degli insiemi - elaborata dal famoso matematico Georg Cantor a partire dal 1870 e sviluppata successivamente da vari autori è oggi una branca acquisita della matematica - quella formulazione che oggi viene chiamata "teoria ingenua degli insiemi" (naive set theory), non è affatto ingenua e per dirla col filosofo americano W. V. O. Quine, è "un lupo travestito d'agnello".

<sup>3</sup> Si dice funzione o applicazione perché è una particolare corrispondenza tra due insiemi, in questo caso tra  $S$  e  $P$ , tale che ad ogni elemento del primo insieme corrisponde uno ed uno solo del secondo.





5. Teoria “ingenua” degli insiemi per la funzione  $g(f,s)$

Tenendo presente la tab. 10 della I parte, che per comodità di consultazione si riporta alla fine del paragrafo, si consideri la funzione gap  $g(s,f)$  con la variabile  $f$  che è il gruppo di famiglie delle coppie di numeri primi consecutivi ed  $s$  che qui è la somma contratta dello stesso gap (fino ad una sola cifra 2, 4, 6, 8 e (1), (3), (5), (7), (9), questi ultimi numeri in parentesi che si sono denominati gap impropri si riferiscono rispettivamente ai gap pari 10, 12, 14, 16, 18. Esempi: per i gap = 2,20,38,56,... è sempre  $s=2$ ; per i gap=14,32,50,68,... si ha sempre l'improprio  $s = (5)$  che corrisponde a 14, il minore di tutti gli equivalenti 32, 50, 68, 86, ...; ecc.)

Detta funzione  $g$ , definita nell'insieme  $G$ , determina una relazione d'equivalenza  $Rg$ , in quanto gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Infatti:  $g_i = g_i \quad \forall g_i \in G$ , essendo  $G = \{g : g \text{ è numero pari}\}$

$$g_i = g_j \rightarrow g_j = g_i \quad \forall g_i, g_j \in G$$

$$(g_i = g_j \text{ et } g_j = g_z) \rightarrow g_i = g_z \quad \forall g_i, g_j, g_z \in G.$$

Detta relazione di equivalenza  $Rg$ , definita nell'insieme  $G$  inoltre determina una decomposizione dell'insieme in sottoinsiemi costituiti da  $G_2, G_4, G_6, G_8, G_{10}, G_{12}, G_{14}, G_{16}, G_{18}$  che a loro volta sono costituiti ciascuno da elementi equivalenti in riferimento alle somme contratte  $s$  ( $G_2 = \{g_2, g_{20}, g_{38}, g_{56}, \dots\}$ ,  $G_4 = \{g_4, g_{22}, g_{40}, g_{58}, \dots\}$ , ...,  $G_{18} = \{g_{18}, g_{36}, g_{54}, g_{72}, \dots\}$  e relativi gruppi delle famiglie di coppie di numeri primi (v. tab. 10)), rispetto alla relazione  $Rg$ .

I sottoinsiemi così ottenuti sono non vuoti, disgiunti a due a due e la loro unione dà l'insieme  $G$ . Si ottiene insomma una partizione dell'insieme dato  $G$ .

Ogni sottoinsieme  $G_s$  può essere individuato da uno degli elementi (numeri pari) che lo costituiscono (es.  $G_2$  è individuato da qualsiasi numero pari la cui somma contratta è sempre 2, cioè da 20, 38, 56, 74, ...). Si dice che la relazione  $Rg$  ha decomposto l'insieme  $G$  in classi d'equivalenza.

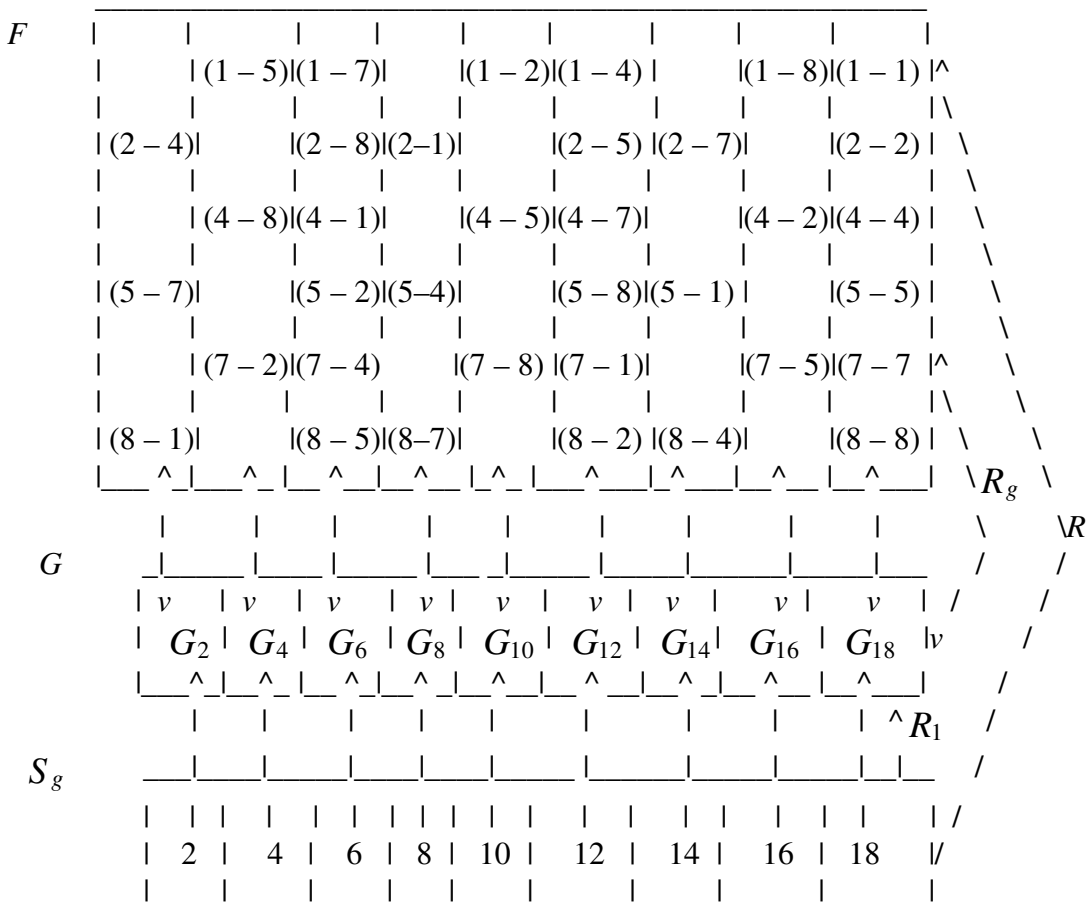
Infine  $G/Rg$  è l'insieme quoziente di  $G$  rispetto ad  $Rg$  ed è l'insieme i cui elementi (sottoinsiemi  $G_2, G_4, G_6, G_8, G_{10}, G_{12}, G_{14}, G_{16}, G_{18}$  sono le classi d'equivalenza ottenute da  $G$  applicando la suddetta relazione  $Rg$ .

Si noti che ai sottoinsiemi  $G_2, G_4, G_8, G_{10}, G_{14}, G_{16}$  corrispondono gruppi di tre famiglie ciascuno di coppie di numeri primi ed ai sottoinsiemi  $G_6, G_{12}, G_{18}$  corrispondono gruppi di sei famiglie

ciascuno di coppie di numeri primi, come risulta dalla tab. 10, da quanto segue con le rappresentazioni estensive e dal diagramma di Eulero-Venn, per cui si hanno:

$S_g = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18\}$  è l'insieme dei minori numeri pari, i cui elementi sono in corrispondenza con i sottoinsiemi di  $G$  di cui si è detto sopra; l'insieme  $F$  è dato dall'unione dei sottoinsiemi, non vuoti e a due a due disgiunti, composti dai gruppi di famiglie, che nel diagramma di Eulero-Venn che segue sono stati posti in verticale, da sopra a sotto,

$$\begin{aligned}
 F &= \{(2-1), (5-4), (8-7)\} \cup \\
 &\{(1-1), (2-2), (4-4), (5-5), (7-7), (8-8)\} \cup \{(1-2), (4-5), (7-8)\} \cup \{(2-4), (5-7), (8-1)\} \cup \\
 &\{(1-4), (2-5), (4-7), (5-8), (7-1), (8-2)\} \cup \{(1-5), (4-8), (7-2)\} \cup \{(2-7), (5-1), (8-4)\} \cup \\
 &\{(1-7), (2-8), (4-1), (5-2), (7-4), (8-5)\} \cup \{(1-8), (4-2), (7-5)\}, \\
 &\text{inoltre tra } G \text{ ed } F \text{ si hanno le seguenti corrispondenze biunivoche dei sottoinsiemi} \\
 G_8 &\leftrightarrow \{(2-1), (5-4), (8-7)\} & , & & G_{18} &\leftrightarrow \{(1-1), (2-2), (4-4), (5-5), (7-7), (8-8)\}, \\
 G_{10} &\leftrightarrow \{(1-2), (4-5), (7-8)\}, & & & G_2 &\leftrightarrow \{(2-4), (5-7), (8-1)\}, \\
 G_{12} &\leftrightarrow \{(1-4), (2-5), (4-7), (5-8), (7-1), (8-2)\}, & & & G_4 &\leftrightarrow \{(1-5), (4-8), (7-2)\}, \\
 G_{14} &\leftrightarrow \{(2-7), (5-1), (8-4)\} & & & G_6 &\leftrightarrow \{(1-7), (2-8), (4-1), (5-2), (7-4), (8-5)\}, \\
 G_{16} &\leftrightarrow \{(1-8), (4-2), (7-5)\}.
 \end{aligned}$$



Il diagramma di Eulero-Venn, compilato senza aver utilizzato alcun software, risente di qualche imperfezione, ma si spera sia ugualmente comprensibile, essendo completo per quanto attiene i sottoinsiemi (gruppi di famiglie) di  $F$  e le corrispondenze biunivoche di questi con i sottoinsiemi

(gruppi di gap equivalenti, di cui si evidenzia l'equivalenza tra i gap 0 e 18) di  $G$ , per i quali si rimanda il lettore ad un facile controllo, di quanto si è riportato sopra in forma estensiva.

Come detto, all'insieme  $F$  appartengono 9 sottoinsiemi non vuoti e a due a due disgiunti, per un totale di 36 famiglie di coppie di numeri primi e i due insiemi  $G$  ed  $F$  hanno i relativi elementi (sottoinsiemi) in corrispondenza biunivoca, per cui si determina la relazione binaria  $R_g$ .

Inoltre avendosi tra gli insiemi  $S_g$  e  $G$ <sup>4</sup> una relazione univoca  $R_1$  tra i rispettivi elementi e tra gli insiemi  $G$  ed  $F$  la relazione biunivoca  $R_g$  tra i rispettivi elementi (sottoinsiemi disgiunti di  $F$  e  $G$ ), sussiste anche una relazione univoca tra gli insiemi  $S_g$  ed  $F$ , con le relative corrispondenze riscontrabili anche dalla tab. 10, per cui si ha una composizione di relazioni binarie che si indica:  $R=R_1 \circ R_g$  che si legge:  $R$  uguale ad  $R_1$  composto  $R_g$ .

Per facilitare la consultazione della richiamata tab. 10 della I parte del presente lavoro, a seguire si riporta la stessa:

tab. 10

Gruppi equivalenti di gap tra due num. primi	Gruppi famiglie	Num. famiglie	Som. nn. cc. famiglia	Som.d.s.
2, 20, 38, 56, 74, 92, ...	(2 - 4),(5 - 7),(8 - 1)	3	6, 3, 9	9
4, 22, 40, 58, 76, 94, ...	(1 - 5),(4 - 8),(7 - 2)	3	6, 3, 9	9
6, 24, 42, 60, 78, 96, ...	(1-7),(2 -8 ),(4 -1),(5-2),(7-4),(8-5)	6	8, 1, 5, 7, 2, 4	9
8, 26, 44, 62, 80, 98, ...	(8 - 7),(2 - 1),(5 - 4)	3	6, 3, 9	9
(1),10,28,46, 64, 82, ...	(1 - 2),(4 - 5),(7 - 8)	3	3, 9, 6	9
(3),12,30,48, 66, 84, ...	(1-4),(2-5),(4-7),(5-8),(7-1),(8-2)	6	5, 7, 2, 4, 8, 1	9
(5),14,32,50, 68, 86, ...	(2 - 7),(5 - 1),(8 - 4)	3	9, 6, 3	9
(7),16,34,52, 70, 88, ...	(1 - 8),(4 - 2),(7 - 5)	3	9, 6, 3	9
(9),0,18,36,54,72,90, ...	(1-1),(2-2),(4-4),(5-5),(7-7),(8-8)	6	2, 4, 8, 1, 5, 7	9
<b>Totali</b>	<b>9</b>	<b>36</b>	<b>9</b>	<b>9</b>

### 6. Il Teorema sulle coppie di primi dei vari gap

In riferimento al paragrafo 3 della I parte [14], tenendo presente l'importante Teorema 1 [13] si può enunciare il seguente Teorema : “Senza considerare 2 e 3, tutti i numeri primi dei vari gruppi di gap equivalenti, le loro potenze ed il loro prodotto sono rispettivamente di tipo o formule riportate nella tabella 12 I parte, escludendo ovviamente che vi siano sempre il 2 e il 3 come fattori primi”.

Per comodità di consultazione, dalla I parte, si riporta a seguire la tab. 12 ed in essa si noti che quando il coefficiente di  $n$  è dispari e il  $gap/2$  è pari allora  $n$  e' sempre dispari, se invece il  $gap/2$  è dispari allora  $n$  e' sempre pari:

Gruppi di gap equivalenti	Tipo o formula generale	Variazione di n
a 2, a 10, a 14	$6n \mp gap/2$	$n$ intero $\geq 1$
a 4, a 8, a 16	$3n \mp gap/2$	$n$ intero $\geq 3$

<sup>4</sup> L'applicazione di  $S_g$  su  $G$  è detta suriettiva e costituisce una biiezione perché è anche iniettiva in quanto ad elementi distinti del dominio corrispondono immagini distinte del condominio. Mutatis mutandis per gli insiemi  $G$  ed  $F$ .

a 6, a 18

$$2n \mp gap / 2$$

$n$  intero  $\geq 4$

a 12

$$n \mp gap / 2$$

$n$  intero  $\geq 11$

## 7. Ringraziamenti e constatazioni di originalità

Per la stesura di questa II parte si hanno nei confronti di Fausto Maggiore, Amedeo De Mattia, Carlo Tre<sup>5</sup> dei debiti specifici, avendo in gran parte letto l'articolo e dato all'autore alcuni suggerimenti, che hanno sicuramente migliorato in molti modi lo stesso. Non si è voluto rinunciare alla parte connessa sugli aspetti relativi alla teoria "ingenua" degli insiemi, perché si ritiene che essi siano serviti a meglio valorizzare i contenuti della trattazione e alcune regolarità che, a detta di Giovanni Ricci, 1° articolo § 2, § 4 [16], fino al 1951 non potevano esserci, contrariamente a quanto l'autore nel § 4 della I parte aveva dubitato; visto che dal '951 fino ad oggi per quanto si sia ricercato non è emersa altra pubblicazione simile se non la [1], appare evidente l'originalità di tutto l'articolo.

L'autore sarà grato al lettore che vorrà procedere a qualche commento e ad eventuali integrazioni, che potranno migliorare la qualità del lavoro.

Lecce, febbraio 2009

## Bibliografia

- [1] Antonio Della Rocca – Alberto Trotta, "Alcune proprietà significative dei numeri primi gemelli", Periodico di matematiche, Organo della Mathesis, N. 2 Mag-Ago 2008 Vol. 1 Serie X Anno CXVIII
- [2] S. Lang, "La Bellezza della Matematica", Torino, Bollati Boringhieri, 1991
- [3] J. H. Conway & R. K. Guy, "Il libro dei numeri", Milano, Hoepli, 1999
- [4] H. Davenport, "Moltiplicative Number Theory" (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 74), Berlin, Springer Verlag, 2000
- [5] David Wells, "Personaggi e paradossi della Matematica", Milano, Arnoldo Mondadori Editori S. p. A., 2002
- [6] G. Carolla, "Formula  $p_k = p_h + 2 \cdot n$  dei numeri primi ed altre considerazioni (I parte)" riportato per gentile concessione della Mathesis in [www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it), nella sezione Approfondimenti: ricerche di appassionati dei "Numeri per tutti", a seguito comunicazione in Congresso Nazionale della Mathesis di Vico Equense (NA), località Seiano – 3,4,5,6 Novembre 2003. Riportato anche su [www.desmatron.altervista.org/number\\_theory/goldbach.php](http://www.desmatron.altervista.org/number_theory/goldbach.php)
- [7] G. Carolla, "Considerazioni su tre congetture matematiche (II parte)" riportato sul sito [www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it) nella sezione Approfondimenti: ricerche di appassionati dei "Numeri per tutti", 2003
- [8] G. Carolla, "I numeri primi di Fibonacci sono infiniti?", riportato sul sito [www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it), nella sezione Approfondimenti: ricerche di appassionati dei "Numeri per tutti", 2004
- [9] G. Carolla – F. Maggiore, "Dimostrazioni per deduzione e per induzione", riportato sul sito [www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it), nella sezione Approfondimenti: idee interessanti. 2005
- [10] G. Carolla, Una nota sull'articolo "Formula ... dei numeri primi ed altre considerazioni (I parte)", riportato sul sito [www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it) nella sezione Approfondimenti: ricerche di appassionati dei "Numeri per tutti", 2006

---

<sup>5</sup> rispettivamente docente di Matematica e Fisica a r., docente ordinario di Scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali nella S. M. S. "D. Alighieri" e Docente di Matematica e Preside a r., tutti di Lecce

- [11] G. Carolla, “Alcuni problemi irrisolti”, riportato sul sito [www.matematicamente.it](http://www.matematicamente.it) nella sezione Approfondimenti – Matematica, 2007 (v. “Nota integrativa...” che segue)
- [12] G. Carolla, “Risolve le congetture di Goldbach e Polignac?” e relativa “Nota integrativa...”, riportati sul sito [www.maecla.it](http://www.maecla.it) nella sezione Matematica, Problemi, articoli, ...,2007
- Facendo riferimento ai lavori sui numeri primi dello stesso autore, si sono indicati i siti che li riportano, ma gli articoli si potranno consultare direttamente anche con “Google”.
- [13] F. Di Noto, A. Tulumello, G. Di Maria, M. Nardelli, “I numeri primi gemelli e l’ipotesi di Riemann generalizzata” pubblicato sul sito [www.gruppoeratostene.com](http://www.gruppoeratostene.com), 2008.
- [14] G. Carolla, “Alcune regolarità dai numeri primi” pubblicato su [www.gruppoeratostene.com](http://www.gruppoeratostene.com), 2009 e su [www.maecla.it](http://www.maecla.it), 2009.
- [15] G. Di Maria, Software “CRAMER 01”: programma per la ricerca del massimo GAP tra numeri primi”, pubblicato su [www.gruppoeratostene.com](http://www.gruppoeratostene.com), 2008.
- [16] G. Ricci, “Repertorio di Matematiche” CEDAM Padova, 1951.